

## МЕХАΝІКА

ОБ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОЛЯХ  
В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ  
С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ЭЛЕКТРОДОВ

Дж.М.МУСТАФАЕВ, Н.А.СЕНИК  
Бакинский Государственный Университет

*На основе, разработанной авторами, приближенной модели пьезоэлектрических пластин с разрывными электродами приводится решение задачи об электроупругих полях в полосе с периодической системой электродов и дается сравнение полученных результатов с известными точными. Приводится сравнение дисперсионных кривых приближенной модели с точным решением задачи о возбуждении волн Лэмба в пьезополосе с произвольной системой электродов.*

Рассматривается пьезополоса симметрии класса 6 mm, толщины  $2h$ , поверхности  $z=h$  предполагаются свободными от нагрузок и на них расположена периодическая симметричная система электродов с заданными значениями потенциалов (рис. 1). Инерционные эффекты в данной задаче не учитываются, а рассмотрение проводится с использованием приближенной модели, предложенной в [1].

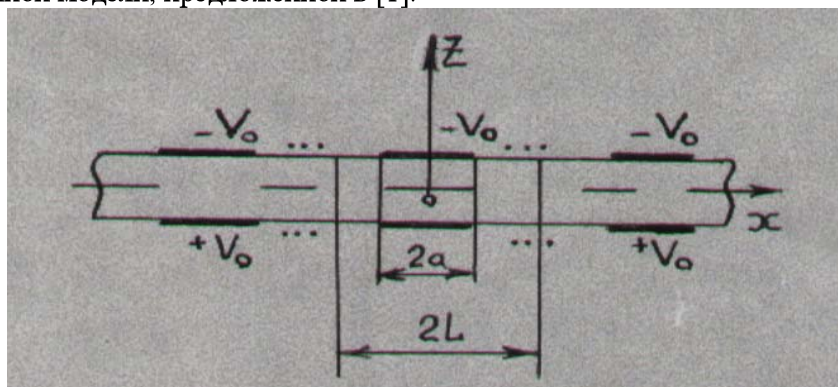


рис. 1.

В рамках принятого подхода потенциал электрического поля определяется упрощенным уравнением электростатики

$$\varphi_{zz} + \beta_0^2 \varphi_{xx} = 0, \quad \beta_0^2 = \varepsilon_{11}^* (1 - k_\varepsilon^2) / \varepsilon_{33}^*, \quad (1)$$

решение которого с учетом условий периодичности и симметрии будет

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \operatorname{sh}(\beta_0 \lambda_n z) \cos(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\lambda(2n+1)}{2L}. \quad (2)$$

Заметим, что входящие уравнения (1) величины определены в работе [1] и принимаются в дальнейшем для других величин без их предварительной расшифровки.

Определяя усилие  $T_1$  в соответствии с [1] с учетом (2) и уравнений равновесия для осевого смещения срединной плоскости полосы получим выражение

$$u(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{d_{15}}{\beta_0^2} - \frac{e_{31}^*}{c_{11}^*} \left( 1 + \frac{d_{15} e_{31}^*}{\beta_0^2 c_{11}^*} \right) \frac{\operatorname{sh}(\beta_0 \lambda_n h)}{\lambda_n h} \right] \Phi_n \sin(\lambda_n x). \quad (3)$$

Вычисляя нормальную составляющую вектора электрической индукции в соответствии с формулой [1]

$$D_z = -\varepsilon_{33}^* \varphi_z + e_{31} u_{,x} - e_{31}^* d_{15} \int_0^z \varphi_{,xx} dz \quad (4)$$

и используя граничные условия (влияние вакуума пренебрегается)

$$\varphi(x, h) = V_0, \quad |x| < a, \quad D_z(x, h) = 0 \quad a < |x| < L$$

с учетом (1), (2), для определения неизвестных коэффициентов  $\Phi_n$  получим систему парных рядов-уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^* \cos(\lambda_n x) &= V_0 - \sum_{n=0}^{\infty} R_n \Phi_n^* \cos(\lambda_n x), \quad 0 \leq x < a \\ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Phi_n^* \cos(\lambda_n x) &= 0, \quad a < x < L \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_n^* &= \left[ 1 + (k_{31}^2 - k_s^2 (1 + k_{31}^2)) \frac{\operatorname{th}(\beta_0 \lambda_n h)}{\beta_0 \lambda_n h} \right] \operatorname{ch}(\beta_0 \lambda_n h) \\ R_n &= \frac{\operatorname{th}(\beta_0 \lambda_n h) [\beta_0 \lambda_n h + (k_{31}^2 - k_s^2 (1 + k_{31}^2))] - \beta_0 \lambda_n h}{\beta_0 \lambda_n h + (k_{31}^2 - k_s^2 (1 + k_{31}^2)) \operatorname{th}(\beta_0 \lambda_n h)}. \end{aligned}$$

Решение системы (4) строится так же, как и в работе [2], и относительно вспомогательной функции  $\sigma(x)$ , пропорциональной плотности зарядов на электроде, получено выражение

$$\sigma(x) = \frac{\sin(\bar{a}/4)\cos(\bar{x}/4)}{\sqrt{\sin^2(\bar{a}/4) + \sin^2(\bar{x}/4)}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m T_{2m} \left( \frac{\sin(\bar{x}/4)}{\sin(\bar{a}/4)} \right). \quad (6)$$

в котором коэффициенты разложения  $a_n$  определяются из решения бесконечной системы уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{ms}^* \left[ a_{ms} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n \Omega_{2n+1}^{(2m)} \Omega_{2n+1}^{(s)}}{2n+1} \right] = \delta_{\varepsilon}, \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Здесь  $a_m^* = (1 - a_0) a_m^* / V_0$ ,  $a_0 = \cos(\bar{a}/2)$ ,  $\bar{x} = \pi x / L$ ,  $\bar{a} = \pi \alpha / L$ , а остальные величины в (7) определены в [2].

После решения системы (7) все электроупругие поля на поверхности  $z=h$  полосы могут быть определены. В частности, для потенциала электрического поля при  $z=h$ ,  $a < x < L$  получена формула

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}, h) = & 2V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{2n+1} \left( \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m a_m^* \omega_{2(2n+1)}^{(2m)} \right) \cos(n+1/2)\bar{x} + \\ & + \frac{V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n^* \int_0^{\pi/2} \ln \left| \frac{\omega_*^2 - \cos^2 \eta}{\omega_0^2 - \cos^2 \eta} \right| \cos(2m\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\omega_*^2 = \frac{\cos^2(\bar{x}/4)}{\sin^2(\bar{a}/4)}, \quad \omega_0^2 = \frac{\sin^2(\bar{x}/4)}{\sin^2(\bar{a}/4)}$$

$$\omega_n^k = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{T_n(\sqrt{1-\tau^2} \sin(\bar{a}/4)) T_k(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Полученные результаты использовались для численного анализа электроупругих полей полосы из пьезокерамики PZT-4 при  $h/L=1/(6\pi)$ ,  $a/L=6$ . На рис. 2 приведено распределение потенциала электрического поля на поверхности полосы на основе точного решения [2] (сплошная линия) и в соответствии с формулой (8) (точки).

Рассмотрим теперь задачу расчета электроупругих полей в полосе конечной системой электродов в рамках приближенной модели [1], предполагая, что в полосе возбуждаются гармонические колебания с длиной

волны существенно большей толщины полосы (рис. 3). Точное решение данной задачи было получено в [3].

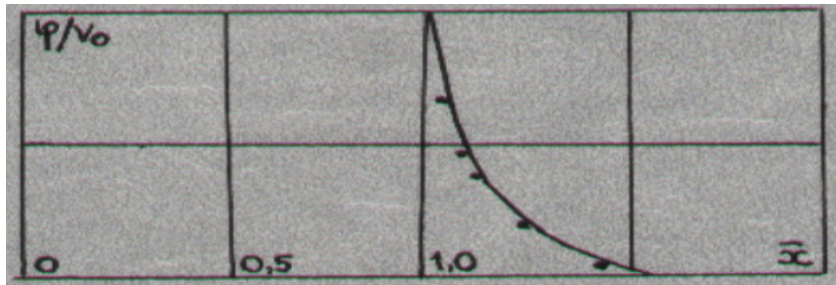


рис.2.

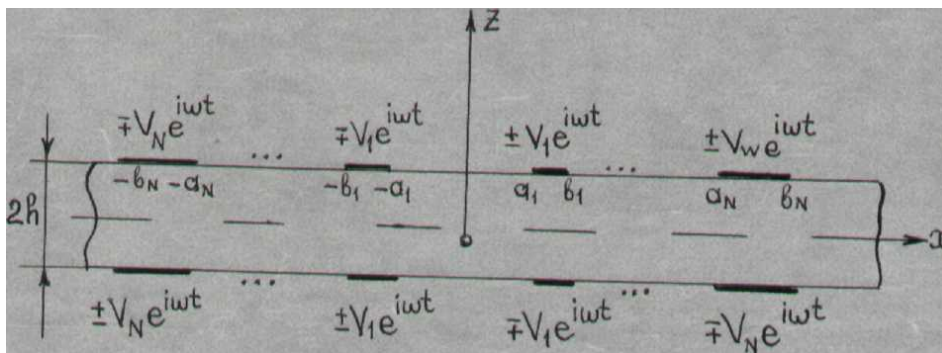


рис. 3

В рамках приближенного подхода потенциал электрического поля определяется уравнением

$$\varphi_{,zz} + \beta^2 \varphi_{,xx} = \beta_1^2 \omega_{,xx}, \quad (9)$$

решение которого может быть представлено в форме

$$\varphi = \psi + (\beta_1/\beta)^2 \omega, \quad \psi_{,zz} + \beta^2 \psi_{,xx} = 0. \quad (10)$$

Для нормальной составляющей вектора, электрической индукции приближенное представление имеет вид

$$D_z = -\varepsilon_{33}^* \psi_{,z} + e_{31}^* u_{11} - e_{31}^* (1 + R_{35}^*) \omega_{,xx} - e_{31}^* d_{15} \int_0^z \psi_{,xx} d\xi \quad (11)$$

В случае симметричных колебаний, когда  $\omega=0$ , осевое смещение полосы определяется из решения уравнения

$$u_{,xx}^* + \chi^2 u^* = \frac{1}{c_{11}^* h^2 \beta} \int_0^\infty F_1(\beta\eta) C(\eta) \cos(\eta x_*) d\eta, \quad (12)$$

в котором учтено, что

$$\psi(x, z) = \int_0^\infty C(p) sh(\beta pz) \sin(px) dp \quad (13)$$

и, кроме этого, приняты обозначения

$$\chi = h\omega/V, \quad V^2 = c_{11}^*/\rho, \quad u_* = u/h, \quad x_* = x/h, \quad z_* = z/h, \quad \eta = ph$$

$$F = d_{15}^*(\beta\eta)^2 - 2e_{31}^{(0)}(\beta\eta)sh(\beta\eta/2) - c_{11}^* d_{15} \chi^2 \left(1 - 2 \frac{sh(\beta\eta/2)}{\beta\eta}\right)$$

Решение уравнения (12) представляется в виде

$$u^* = \frac{1}{c_{11}^* h^2 \beta} \int_0^\infty F_1(\beta\eta) C(\eta) \cos(\eta x_*) / (\eta^2 - \chi^2) d\eta \quad (14)$$

Рассматривая вспомогательную задачу, в которой при  $z=1/2$  выполнено условие  $D_z(x, 1/2) = \sigma(x)$ , с учетом формул (11)- (13), получим

$$F_2(\beta\eta) C(\eta) = - \frac{2h^2}{\varepsilon_{33}^{(0)} \beta \pi} \int_0^\infty \sigma(t) \sin(\eta t) dt, \quad (15)$$

что позволяет определить потенциал электрического поля при  $z=1/2$  соотношением

$$\varphi(x, 1/2) = - \frac{2h}{\varepsilon_{33}^{(0)}} \int_0^\infty \sigma(t) \hat{K}(t, x) dt. \quad (16)$$

Плотность электрических зарядов  $\sigma(t)$  определим так, чтобы выполнялись следующие граничные условия для электрического поля

$$\varphi(x, 1/2) = V_i \quad \text{на электродах}$$

$$D_z(x, 1/2) = \sigma(x) = 0 \quad \text{на неэлектродированных участках.}$$

Эти условия приводят к системе сингулярных интегральных уравнений, которая после некоторых преобразований приводится к виду

$$\sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} \sigma_k(t) \ln \left| \frac{x+t}{x-t} \right| dt = V_i + \int_{a_k}^{b_k} \sigma_k(t) K(t, x) dt. \quad (17)$$

Ядро в (17) определяется несобственным интегралом, понимаемым в смысле главного значения. Полоса этого интеграла определяются корнями дисперсионного уравнения, которое может быть представлено в виде

$$\chi^2 = \frac{\eta^2 \varepsilon_{33}^{(0)} c_{11}^* \beta \operatorname{ch}(\beta \eta / 2) + 2 e_{31}^* e_{31}^{(0)} \beta \eta \operatorname{sh}(\beta \eta / 2)}{\varepsilon_{33}^{(0)} c_{11}^* \beta \operatorname{ch}(\beta \eta / 2) + 2 e_{31}^* c_{31}^* d_{15} \operatorname{sh}(\beta \eta / 2) / (\beta \eta)}. \quad (18)$$

Система уравнений (17) методом Бубнова – Галеркина сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений и решается численно.

Аналогичным образом решается задача о возбуждении в полосе изгибных колебаний, когда на электродах задаются симметрично по переменной  $z$  значения потенциалов. Соответствующее этому случаю дисперсионное уравнение имеет вид

$$\beta(\eta^4 - \chi^2 \eta^2 - \lambda^2 \chi^2) \operatorname{sh}(\beta \eta / 2) \left( \beta + \frac{c_{11}^*}{c_{44}^E} k_e^* \right) + 96 \frac{c_{11}^*}{c_{44}^E} k_s^* \left[ \frac{c_{11}^*}{c_{44}^E} \chi^2 - \frac{e_{31}^{(0)} \beta^2 \eta^2}{4 e_{15}} \right] \times \\ \times \frac{\beta \eta \operatorname{ch}(\beta \eta / 2) - 2 \operatorname{sh}(\beta \eta / 2)}{2 \beta} = 0. \quad (19)$$

Представляется целесообразным привести сравнение дисперсионных кривых (18), (19) с соответствующими кривыми, полученными в работе [3] для симметричных и антисимметричных волн Лэмба. На рис. 4,5 приведены результаты расчета фазовых скоростей симметричной и антисимметричной волн для полосы из материала *Cds*, полученных на основе точного решения (кривые 1) и приближенного решения рассмотренных задач, причем фазовые скорости нормированы к скорости  $V^2 = c_{11}^E / \rho$ , а  $h_* = h / \lambda$ ,  $\lambda = V / (2\pi\omega)$ . Представленные в настоящей работе данные подтверждают применимость в [1] приближенного подхода, более просто производить расчет длинноволновых колебаний в преобразователях.

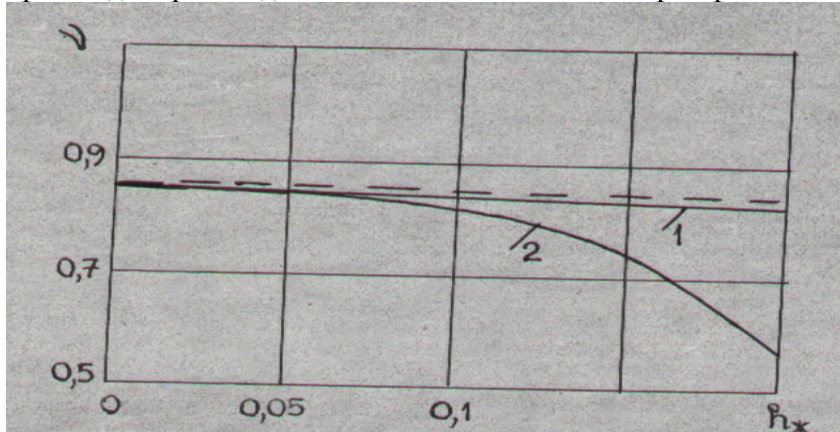


рис.4.

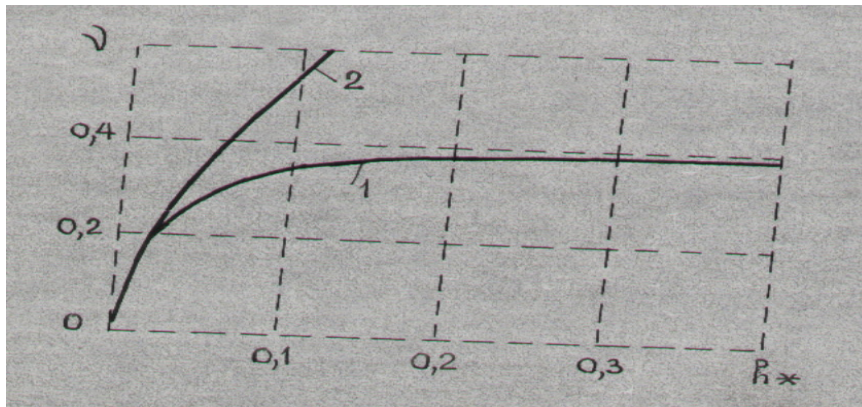


рис.5.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кокунов В.А., Мустафаев Дж. М., Сеник Н.А. К расчету пьезоэлектрических пластин с разрывными электродами. –Препринт ин. –та физики АН Азерб. ССР, 1987, 11с.
2. Кокунов В.А., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Плоская задача электроупругости для пьезоэлектрического слоя с периодической системой электродов на поверхностях. –ПММ, 1985, 49, №3, с. 489-491.
3. Сеник Н.А. Возбуждение симметричных и антисимметричных волн Лэмба в пьезоэлектрической полосе. – «Актуальные проблемы фундаментальных наук». Тезисы докл. междунар. конф., Москва, 1991.

#### PERİODİK ELEKTRODLAR SİSTEMİNƏ MALİK PYEZOELEKTRİK ZOLAQDA ELEKTROELASTİK SAHƏLƏR HAQQINDA

S.M.MUSTAFAFAYEV, N.A.SENİK

#### XÜLASƏ

Müəlliflər tərəfindən kəsilən elektrodlar sistemində malik pyezoelektrik lövhələr üçün təklif olunmuş təqribi model əsasında pyezoelektrik zolaqda periodik elektrodlar sisteminin yaratdığı elektroelastik sahələr haqqında məsələnin həlli verilir və alınan nəticələr məlum dəqiq həllərlə müqayisə edilir. Təqribi modelin dispersiya əyrilərinin pyezozolaqda ixtiyari elektrodlar sistemi vasitəsilə Lamb dalğalarının həyəcanlandırılması məsələsinin dəqiq həlli ilə müqayisəsi verilir.

**ABOUT ELECTROELASTIK FIELDS IN  
PEZO-CERAMIC STRIPE WITH PERIODICAL SYSTEM OF ELECTRODES**

**J.M.MUSTAFAYEV, N.A.SENIK**

**SUMMARY**

It is reduced a solution of electroelastic fields in stripe with periodical system of electrodes and it is given a comparison of obtained results with known exact ones, on the basis of approximate model of pezoelctrical plates with breaking electrodes, which was worked out by authors.

It is given a comparison of dispersion curves of approximate model with exact solution of problem about stimulation of Lamb's waves in pezostripe with arbitrary system of electrodes.